

数学系科目に対するSageTeXを用いた教材作成について

兵藤 史 武^{*1}

要 約

TeXは、数式を含んだ文書を作成するための優れたソフトウェアで、高等教育機関で広く用いられているが、計算をしたり、方程式を解いたりするような数式処理の機能が、標準では存在しないという欠点がある。SageTeXはその機能をTeXに付与する拡張機能である。本稿ではSageTeXと関連したソフトウェアについて概説したあと、SageTeXを用いて数学の教材を効率的に作成する方法に関して実例を交えて紹介する。

1. 緒言

学習において、基本事項の反復は欠かせない、数学・統計系の科目では、基本的な問題を数値や関数を変えて繰り返し解くという、問題演習がそれにあたるだろう。既存の教材で適当なものがあればよいが、そのような教材が存在しない場合もある。例えば筆者が担当している「応用数学」では電気数学を理解するための微分積分の基本事項を教授するのが目的であるが、理工系の標準的な教科書ではレベルが高すぎ、文系向けの教科書では、電気数学(物理学)に必須の微分方程式まで扱っている書物は筆者の知る限り存在しない。このような事情から受講者のレベルと目的に沿った教材を自作する必要がある。説明用の教材を作ることにはさしたる困難はないが、演習用の問題を作るにあたって、先に述べたように類似した問題をある程度の数、解答含めて作成する必要がある。これを手作業で行うには膨大な時間と労力がかかるばかりか、誤植や計算ミスが起こる可能性も高くなる。実際、講義中にこれらをたびたび指摘された。このような事情から、問題作成から模範解答作成まで一括して行える方法がないものかと模索していたが、文書作成システムのLaTeXの拡張機能SageTeXを用いて教材作成の効率を大幅に上げることができた。SageTeXはLaTeX上で数式処理システムSageMathを動作させるためのツール

であり、非常に有用であるが、具体的な活用事例は筆者の知る限り存在しない。本稿ではこれらのソフトウェアについて概説した後、SageTeXを用いた教材の作成方法について解説する。

2. 教育に用いられている数学系ソフトウェア

数学教育で用いられているソフトウェアは複数ある。濱田¹⁾によればそれらは動的なものと静的なものに分けられる。動的なものとは幾何学におけるGeoGebra²⁾やCinderella³⁾のような学習者が学ぶ際に実際に操作するソフトウェアのことであり、それぞれ、濱田¹⁾と金子⁴⁾の活用事例がある。これらは学習者が数学の概念を視覚的に理解するのに役立つ。一方、静的なものとは教育者が学習者に提供する印刷物を作成するためのものを指す。これに関しては、中等教育まではStudyaid⁵⁾が多く使われているが、高等教育においては後述するTeX⁶⁾が大きなシェアを占めている。

3. TeX

TeX⁶⁾とはオープンかつフリーの組版処理システムであり、数式を含んだ文書を作成するのに、高等教育機関で標準的に用いられている。高遠⁷⁾の調査によると、調査対象の大学教員の全員が数学教材の作成にTeXを用いていた。このような事実から、

*1 川崎医療福祉大学 医療福祉マネジメント学部 医療情報学科
(連絡先) 兵藤史武 〒701-0193 倉敷市松島288 川崎医療福祉大学
E-mail : fumitake.hyodo@mw.kawasaki-m.ac.jp

TeXによる教材開発の方法を考えることは自然なことであろう。TeXの特徴として、CやJavaのように、テキストファイルにプログラムコードを記述し、それをコンパイルによってPDF文書を生成することが挙げられる。例えば、積分の記号

$$\int_a^b x^2 dx$$

を表示したければ、TeXでは

```
$\int_a^b x^2 dx$
```

と入力し、文書をコンパイルすればよい。また、Wordの便利な機能である「箇条書き」や「段落番号」機能も備えており、これらを用いれば、数学の講義のレジュメや練習問題を作成することが可能である。例えば、筆者の担当している「応用数学」では、図1のような問題を課しているが、これは次のようなコードで生成される。なお、簡単のため、大問を一つとし、問題と解答を同ページに出力している。

問題

1. 次の関数の微分を求めよ。
 - (a) x^2
 - (b) $5x^4$
 - (c) $x^2 + x$
 - (d) $2x^3 + 2x^2$
 - (e) $\cos x$
 - (f) $e^x + x^3$

解答

1.
 - (a) $2x$
 - (b) $20x^3$
 - (c) $2x + 1$
 - (d) $6x^2 + 4x$
 - (e) $-\sin x$
 - (f) $e^x + 3x^2$

図1 微分積分の問題と解答

```
{\bf 問題}
```

```
\begin{enumerate}
```

```
\item 次の関数の微分を求めよ.
```

```
\begin{enumerate}
```

```
\item  $x^2$ 
```

```
\item  $5x^4$ 
```

```
\item  $x^2 + x$ 
```

```
\item  $2x^3 + 2x^2$ 
```

```
\item  $\cos x$ 
```

```
\item  $e^x + x^3$ 
```

```
\end{enumerate}
```

```
\end{enumerate}
```

```
\bigskip
```

```
{\bf 解答}
```

```
\begin{enumerate}
```

```
\item  $x$ 
```

```
\begin{enumerate}
```

```
\item  $2x$ 
```

```
\item  $20x^3$ 
```

```
\item  $2x + 1$ 
```

```
\item  $6x^2 + 4x$ 
```

```
\item  $-\cos x$ 
```

```
\item  $e^x + 3x^2$ 
```

```
\end{enumerate}
```

```
\end{enumerate}
```

このようにTeXは数学の研究教育で用いられているが、標準で計算機能を持っていないという欠点がある。例えば、標準では、 x と x の積を自動で計算し、 x^2 と表示することはできない。しかし、TeXには多くの拡張機能が存在しており、そのうちの1つである、数式処理システム SageMath⁸⁾をTeXのソースコードの中で呼び出す拡張機能 SageTeX⁹⁾により、この欠点を補うことができる。まずは SageMath について概説しよう。

4. SageMath

SageMath⁸⁾は数式処理システムであり、TeX同様オープンソースのフリーソフトウェアである。フリーではあるが、その機能は高く、実際の論文でも用いられており、木村¹⁰⁾の報告にもある通り、教育にも利用されている。SageMathは、コマンドを入力によってコンピューターに数式を処理させることができる。例えば、 x^2 を1から2まで積分するのであれば

```
integral(x^2, x, 1, 2)
```

というコマンドを用いればよい。またSageMath上ではPython言語を用いたプログラミングも可能であるため、ループや条件分岐を用いた複雑な処理も行うことができる。もちろんMathematicaのような数式処理を行う高価なソフトウェアを用いれば、同様な計算結果を得ることができるばかりか、プログラミングの知識も必要なく、手軽に結果を得ることができる。あとはその結果を論文なり講義のレジュメなりに張り付ければよい。しかし、数値に変更の必要があった場合はどうであろうか。その場合、も

う一度数値を入力し、結果を得てから再びコピーアンドペーストしなければならない。さらに、その計算結果がその後の内容にも影響を及ぼすような場合、すべてを同様に手動で変更しなければならない、かなりの時間と労力を要してしまうだろう。その点、SageTeXを用いれば、TeXのソースファイルにSageMathのコードを書き込み、一緒にコンパイルできるため、変更箇所は最小限で済み、非常に効率が良い。もちろんExcelのVBAとWordを組み合わせれば、簡単な統計処理や計算は可能であろうが、高度な数式処理や計算となると、SageTeXに軍配が上がるであろう。また無料ですべてを行えることも大きな魅力である。

5. SageTeX

SageTeX⁹⁾は、TeX文書の中に書かれた SageMath のプログラムを計算結果に置き換えて出力する TeX の拡張機能である。TeX文書内の $\$ax^2+bx+c\$$ はコンパイルすると ax^2+bx+c と表示されるが、TeX では a, b, c, x は数値の構造を持たないただの文字とみなされる。一方で、SageTeXの機能を用いて、

```
\begin{sagesilent}
a=2; b=3; c=1
var('x')
poly(x) = a*x^2+b*x+c
\end{sagesilent}
 $\$sage{poly(x)}\$$ 
としてやれば、
 $2x^2+3x+1$ 
と表示される。
```

このように、SageMathのプログラムを $\$begin{sagesilent}$ と $\$end{sagesilent}$ で囲むことでTeXファイルに埋め込むことができ、 $\$sage{\}$ コマンドによって SageMath内の変数の値を参照することができる。2次方程式を解く問題の問題文と解答を作成するならば、SageMathのコマンドsolveをもちいて、

```
\begin{sagesilent}
a=2; b=3; c=1
var('x')
poly(x) = a*x^2+b*x+c
eq= poly(x)==0
solution = solve(eq,x)
\end{sagesilent}
```

```
\begin{itemize}
\item 問題： $\$sage{eq}\$$  を解け。
\item 解答： $\$sage{solution}\$$ 。
\end{itemize}
```

としてやれば、出力

- 問題： $2x^2+3x+1=0$ を解け。
- 解答： $[x=(-\frac{1}{2}), x=(-1)]$

を得る。a,b,c の値を変化させれば、2次方程式を解く問題をいくらかでも作成できる。なお、解答の出力の $[\]$ や $()$ を煩わしいと感じるなら、少しコードは複雑になるが、

```
 $\$x=\$sage{solution[0].rhs()}, x=\$sage{solution[1].rhs}\$$ 
```

とすればよい。これらを実装したTeXファイルと出力されたPDFファイルを図2示す。

<pre>1 \documentclass{jarticle} 2 \usepackage{sagetex} 3 4 \begin{document} 5 \begin{sagesilent} 6 a=2; b=3; c=1 7 var('x') 8 poly(x) = a*x^2+b*x+c 9 eq= poly(x)==0 10 solution = solve(eq,x) 11 \end{sagesilent} 12 13 \begin{itemize} 14 \item 問題：$\\$sage{eq}\\$を解け。 15 \item 解答：$\\$sage{solution}\\$。 16 \item 見栄えの良い解答: 17 $\\$x=\\$sage{solution[0].rhs()}\\$;$ 18 $\\$x=\\$sage{solution[1].rhs()}\\$。 19 \end{itemize} 20 \end{document}</pre>	<ul style="list-style-type: none"> ● 問題：$2x^2 + 3x + 1 = 0$ を解け。 ● 解答：$[x = (-\frac{1}{2}), x = (-1)]$。 ● 見栄えの良い解答: $x = -\frac{1}{2}, x = -1$。
---	---

図2 ソースファイル (左) と PDF ファイル (右)

6. SageTeX を用いた教材作成

この節では、SageTeXの教材作成に活用する方法を、具体例を2つ挙げて紹介しよう。まずは第3節で挙げた微分の練習問題について考えてみよう。SageTeX導入以前は、このようなコードを用いていたが、問題に対する解答を作者自身が手動で入力する必要があり、計算を間違えたり、2番の解答を3番に記述してしまったりといったミスが発生した。そのほかにも設問変更する際に解答を変更し忘れたこともあった。このような問題に関しては、SageTeXを用いて次のように解決できた。まず SageMath側の処理として以下のようにする。

```

\begin{sagesilent}
var('x')
f1 = [x^2, 5*x^4, x^2 + x, 2*x^3 + 2*x^2, cos(x),
e^x + x^3]
g1 = [diff(f1[i],x) for i in range(len(f1))]
\end{sagesilent}

```

ここでは List 型変数 `f1` に設問の関数を順番に格納し、List 型変数 `g1` にそれぞれの関数の微分を、for 文を用いて格納している。ここで、`diff` は微分を意味する SageMath のコマンドである。そして TeX のコードは以下のように記述する。

```

{\bf 問題}
\begin{enumerate}
\item 次の関数の微分を求めよ。
\begin{enumerate}
\foreach \Yi in {0,...,5}{%
\item
\${\sage{f1[\Yi]}}$.
}
\end{enumerate}
\end{enumerate}

```

```

{\bf 解答}
\begin{enumerate}
\item \Y
\begin{enumerate}
\foreach \Yi in {0,...,5}{%
\item
\${\sage{g1[\Yi]}}$.
}
\end{enumerate}
\end{enumerate}

```

ここでは TeX の反復処理のコマンドである `foreach` コマンドを用いている。これにより、設問と解答が順番通りに出力される。このようにプログラミングすれば、`f1` への入力が正確でありさえすれば、設問と解答が正しく作成される他、設問の関数の変更も容易である。ただし、設問の数を変更するときには TeX のループ処理 `\foreach \Yi in {0,...,5}` の部分の「5」も手動で変更しなければならない。これは、TeX の `foreach` のループ変数は SageTeX の変数を参照できないためである。例えば、「5」を `\sage{len(f1)-1}` としてもコンパイルエラーになる。これは今後の課題である。

次に図3のような記述式の問題を見てみよう。これは微分方程式の初期値問題を、ラプラス変換を用いて解く問題である。重要かつ高度な内容であり、学生の理解を助けるうえでも記述のミスは極力避けたいところであるが、模範解答の記述量が多いため、設問の係数や初期値の変化に応じて変更すべき箇所が多いことが懸念材料である。このような問題も SageTeX を用いて解決できる。まず SageMath の部分は以下のようにする。

問題

- 次の微分方程式を y についてラプラス変換を用いて解け。なお y は t の関数である。また解答の過程を記せ。

$$(a) \quad 3y(t) + \frac{d}{dt}y(t) + 4 = 0, \quad y(0) = 0.$$

解答

- 微分方程式の両辺をラプラス変換すると、

$$sY + \frac{4}{s} + 3Y - y(0) = 0.$$

$y(0) = 0$ より、これを Y について解いて

$$Y = -\frac{4}{(s+3)s}$$

を得る。これをラプラス逆変換して、

$$y(t) = \frac{4}{3}e^{-3t} - \frac{4}{3}$$

を得る。

図3 ラプラス変換の問題と解答

```

\begin{sagesilent}
var('y,t,s')
y=function('y')(t)
a=1
b=3

```

```
c=4
init=0
ode = a*diff(y,t)+b*y+c==0
transformed=laplace(ode,t,s)
ans=solve(transformed,laplace(y,t,s))
f=ans[0].rhs()
f=f.subs(y(t=0)==init)
\end{sagesilent}
```

前問と同様に、変数 a, b, c (微分方程式の係数) と $init$ (初期値) の値を決めれば、SageMathの組み込み関数である `laplace`, `solve`, `subs` を用いて、最終的に変数 f に解のラプラス変換を格納される。なお、これらのコマンドはそれぞれ、ラプラス変換のコマンド、方程式を解くコマンド、代入のコマンドである。そして、SageMath側で得られた変数を TeX側で以下のように参照することにより、入力に応じた問題文や記述解答が得られる。

問題

次の微分方程式を y についてラプラス変換を用いて解け。なお y は t の関数である。また解答の過程を記せ。

$y(0) = 0$ 。

問題

- 次の微分方程式を y についてラプラス変換を用いて解け。なお y は t の関数である。また解答の過程を記せ。
 - $3y(t) + \frac{\partial}{\partial t}y(t) + 4 = 0, \quad y(0) = 0.$

解答

- 微分方程式の両辺をラプラス変換すると、

$$s\mathcal{L}(y(t), t, s) + \frac{4}{s} + 3\mathcal{L}(y(t), t, s) - y(0) = 0.$$

$y(0) = 0$ より、これを $\mathcal{L}(y(t), t, s)$ について解いて

$$\mathcal{L}(y(t), t, s) = -\frac{4}{(s+3)s}$$

を得る。これをラプラス逆変換して、

$$y(t) = \frac{4}{3}e^{-3t} - \frac{4}{3}$$

を得る。

```
\end{enumerate}
\end{enumerate}
\bigskip
\bf 解答
\begin{enumerate}
\item
\begin{enumerate}
\item
微分方程式の両辺をラプラス変換すると、
\mathcal{L}(y(0)) = \mathcal{L}(init) より、これを
\mathcal{L}(laplace(y,t,s)) について解いて
\mathcal{L}(laplace(y,t,s)) = \mathcal{L}(factor(f))
を得る。これをラプラス逆変換して、
\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(f.inverse_laplace(s,t))
を得る。
\end{enumerate}
\end{enumerate}
\end{enumerate}
```

ただし、これだけでは、コンパイル結果は図4のように、微分の記号が偏微分の記号になっていたり、 e^{-3t} となるべきところが $e^{(-3t)}$ のように余計な括弧がついていたりする。また y のラプラス変換が $\mathcal{L}(y(t), t, s)$ と表示されてしまう。ラプラス変換において、変換元の関数は小文字で表し、変換先はその大文字で表すという慣例に従った方が、学生にとっても見やすい解答になるだろう。これらの問題

図4 ラプラス変換の問題と解答：SageTeX のみを用いたもの

に対しては、SageMathのプログラムをTeXに変換する際に生成される中間ファイル(末尾が「.sagetex.sout」のファイル)に、SageMathのプログラムをTeXに変換するルールがテキスト形式で記述されていることに着目し、プログラミング言語Perlの文字列置換のコマンドを用いて、このファイルの内容を変更することで対応した。例えば $\mathcal{L}(y(t), t, s)$ を Y に変更したければ、 $\mathcal{L}(y(t), t, s)$ はTeXでは $\$ \mathcal{L} \left(y \left(t \right), t, s \right) \$$ と表されるので、Perlのコマンド

```
perl -i -pe 's/\mathcal{L}\left([a-z])\left(t\right)/
    \u1/g' 中間ファイル名
を実行すればよい。研究用途であれば、このような配慮はあまり必要ないだろうが、初学者に向けては、わかりやすい記号の使用を心がけるべきだろう。こ
```

のようにSageTeXは他の言語と組み合わせることで、より柔軟な利用が可能になる。

7. まとめ

本稿では、TeX, SageMath, SageTeXの簡単な紹介を行い、これらを用いた教材作成について言及した。これらは無償ではあるが、十分に高機能であり、高等教育機関で使用するにも十分である。またプログラミングの知識がある程度あれば、PythonやTeXの持つ条件分岐やループ構造を用いて、本稿の最後で示したように、ケアレスミスを防ぎつつ、効率的に教材を作成することができる。一方でSageTeXに関しては日本語の解説はほとんどない状態であり、高等教育機関に十分に普及しているとは言いがたいが、現在も開発が行われており、今後の発展と普及が十分に期待される。

文 献

- 1) 濱田龍義：動的数学ソフトウェアの教育利用について。数理解析研究所講究録, 1978, 201-211, 2015.
- 2) Geogebra : *GeoGebra*.
<https://www.geogebra.org>, 2021. (2021.5.26確認)
- 3) Richter-Gebert J and Kortenkamp U : *Cinderella*.
<https://www.cinderella.de/tiki-index.php>, 2019. (2021.5.26確認)
- 4) 金子真隆 : CindyJS によるアクティブラーニングの可能性。数理解析研究所講究録, 2022, 48-58, 2017.
- 5) 数研出版 : *Studyaid*.
<https://www.chart.co.jp/stdb/>, 2020. (2021.3.23確認)
- 6) Japanese TeX Development Community Board : *TeX Wiki*.
<https://texwiki.texjp.org>, 2018. (2021.5.26確認)
- 7) 高遠節夫 : TEX による教材作成環境の充実。数理解析研究所講究録, 2022, 118-217, 2017.
- 8) The Sage Development Team : *SageMath*.
<https://www.sagemath.org/>, 2021. (2021.5.26確認)
- 9) SageMath Developers : *SageTEX - Embed Sage code and plots into LATEX*.
<https://ctan.org/pkg/sagetex>, 2020. (2021.5.26確認)
- 10) 木村巖 : freeな数式処理ソフトSageの学部教育での活用事例。数理解析研究所講究録, 1865, 101-109, 2013.

(2021年6月2日受理)

Development of Teaching Materials for Mathematics Using SageTeX

Fumitake HYODO

(Accepted Jun. 2, 2021)

Key words : mathematics education, mathematics teaching, teaching materials, SageTeX

Abstract

TeX is a typesetting system used to make documents, including mathematical formulae, and is widespread among higher education institutions. It cannot, however, be used for symbolic or numeric computation. SageTeX is an extension of TeX and provides it with those functions. In this paper, we introduce SageTeX and its related software, and give a method to create teaching materials for mathematics using them.

Correspondence to : Fumitake HYODO

Department of Health Informatics

Faculty of Health and Welfare Services Administration

Kawasaki University of Medical Welfare

288 Matsushima, Kurashiki, 701-0193, Japan

E-mail : fumitake.hyodo@mw.kawasaki-m.ac.jp

(Kawasaki Medical Welfare Journal Vol.31, No.1, 2021 277–283)